# Déterminant de Gram

Soit $E$ un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel muni d'un produit scalaire noté $(.|.)$

*Partie I*

1. Soit $u$ et $v$ deux vecteurs quelconques de $E$.
   On notre $Gram(u,v)=\begin{pmatrix}(u\,|\,u) & (u\,|\,v)\\ (v\,|\,u) & (v\,|\,v)\end{pmatrix}$ et $G(u,v)=\det(Gram(u,v))$.
   Montrer que $G(u,v)\geq 0$. A quelle condition y-a-t'il égalité ?

2. Soit $u,v$ et $w$ trois vecteurs quelconques de $E$.
   On note $Gram(u,v,w)=\begin{pmatrix}(u\,|\,u) & (u\,|\,v) & (u\,|\,w)\\ (v\,|\,u) & (v\,|\,v) & (v\,|\,w)\\ (w\,|\,u) & (w\,|\,v) & (w\,|\,w)\end{pmatrix}$ et $G(u,v,w)=\det(Gram(u,v,w))$.

2.a On suppose que $w$ est orthogonal à $u$ et $v$.
Exprimer $G(u,v,w)$ en fonction de $G(u,v)$.

2.b On suppose que $w$ est combinaison linéaire de $u$ et $v$.
Calculer $G(u,v,w)$.

2.c On suppose que $w=t+n$ avec $t$ combinaison linéaire de $u$ et $v$, et $n$ orthogonal à $u$ et $v$.
Montrer que $G(u,v,w)=G(u,v)\|n\|^2$.

2.d Etablir l'équivalence : $(u,v,w)$ est libre $\Leftrightarrow$ $G(u,v,w)\neq 0$.

*Partie II*

Soit $u_1,\ldots,u_n$ $n$ vecteurs de $E$.
On note : $Gram(u_1,\ldots,u_n)$ la matrice carrée d'ordre $n$ dont le coefficient d'indice $(i,j)$ est $(u_i\,|\,u_j)$ et $G(u_1,\ldots,u_n)$ le déterminant de celle-ci.

1. On suppose la famille $(u_1,\ldots,u_n)$ liée. Montrer que $G(u_1,\ldots,u_n)=0$.

2. On suppose la famille $(u_1,\ldots,u_n)$ libre. On introduit $(e_1,\ldots,e_n)$ une base orthonormée de l'espace vectoriel engendré par $u_1,\ldots,u_n$ et on note $A=(a_{i,j})$ la matrice de passage de la base $(e_1,\ldots,e_n)$ à la base $(u_1,\ldots,u_n)$.

2.a Exprimer $(u_i\,|\,u_j)$ à l'aide des coefficients de la matrice $A$.

2.b Montrer que $Gram(u_1,\ldots,u_n)={}^tAA$. En déduire que $G(u_1,\ldots,u_n)>0$.

3. Soit $F$ un sous-espace vectoriel de $E$ de dimension $p$ et $(e_1,\ldots,e_p)$ une base de $F$.
   On appelle distance de $x$ vecteur de $E$ au sous-espace vectoriel $F$ le réel : $d(x,F)=\inf\limits_{y\in F}\|x-y\|$.

3.a En écrivant $x=x_F+n$ avec $x_F\in F$ et $n\in F^\perp$, observer que $d(x,F)=\|n\|$.

3.b Etablir : $d(x,F)=\sqrt{\dfrac{G(e_1,\ldots,e_p,x)}{G(e_1,\ldots,e_p)}}$.

*Partie III*

Ici $E$ désigne la $\mathbb{R}$ algèbre des polynômes réels en l'indéterminée $X$.

1. Pour tout polynôme $P$ et $Q$, on pose $\varphi(P,Q)=\int_0^1 P(t)Q(t)\mathrm{d}t$.
   Montrer que $\varphi$ est un produit scalaire.
   Désormais, on munit $E$ de ce produit scalaire et on note $(P\,|\,Q)$ au lieu de $\varphi(P,Q)$ le produit scalaire de deux éléments $P$ et $Q$ de $E$.

2.a On désire calculer $d = \inf_{a,b\in\mathbb{R}} \int_0^1 (t^2 - (at+b))^2 \,\mathrm{d}t$ .

Interpréter $d$ à l'aide de la distance d'un vecteur à un sous-espace vectoriel de $E$ à préciser.

2.b Calculer les déterminants $\begin{vmatrix} \frac{1}{1} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{vmatrix}$ et $\begin{vmatrix} \frac{1}{1} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{vmatrix}$.

2.c Donner la valeur de $d$ .